

## Zadatak 1: Dodavanje stepena

### Opis:

Dat je niz  $a = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ . U  $x$ -toj sekundi možeš izabrati proizvoljan broj različitih indeksa  $i_1, i_2, \dots, i_k$  i svakom dodeliti  $a_{i_j} := a_{i_j} + 2^{x-1}$ .

Tvoj zadatak je da niz postane **neopadajući** nakon najmanjeg mogućeg broja sekundi. Niz je neopadajući ako važi  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ .

Najdi najmanji broj sekundi  $T$  za koji važi da se niz može učiniti neopadajućim posle  $T$  sekundi.

### Ulaz:

Prva linija: broj test primera  $t$  ( $1 \leq t \leq 10^4$ ). Za svaki test primer: jedan broj  $n$  ( $1 \leq n \leq 10^5$ ) i zatim niz celih brojeva  $a_1, \dots, a_n$  ( $-10^9 \leq a_i \leq 10^9$ ).

Ukupna suma  $n$  kroz sve testove je  $\leq 10^5$ .

### Izlaz:

Za svaki test primer ispiši jedan broj — minimalan broj sekundi potreban da se niz učini neopadajućim.

### Primer:

Ulaz

3

4

1 7 6 5

5

1 2 3 4 5

2

0 -4

Izlaz

2

0

3

### Objašnjenje:

Prvi test: Dodaj 1 na pozicije 3 i 4 u prvoj sekundi, pa 2 na poziciju 4 u drugoj sekundi.

Drugi test: Niz je već neopadajući.

Treći test: Potrebno je najmanje 3 sekunde da se  $-4$  dovede na vrednost 0.

## Zadatak 2: Broj dobrih podstringova

### Opis:

Dat je binarni string  $s$  (to znači da svaki karakter u stringu može biti samo 0 ili 1).

Neka je  $f(t)$  dekadna vrednost celog broja  $t$  koji je zapisan u binarnom obliku (dozvoljene su vodeće nule). Na primer:  $f(011) = 3$ ,  $f(00101) = 5$ ,  $f(00001) = 1$ ,  $f(10) = 2$ ,  $f(000) = 0$ ,  $f(000100) = 4$ .

Podstring  $s_l, s_{l+1}, \dots, s_r$  je dobar ako važi:  $r - l + 1 = f(s_l \dots s_r)$ , tj. dužina podstringa je jednaka njegovoj vrednosti kada se binarni zapis konvertuje u dekadni broj.

Na primer, za string  $s = 1011$  postoji 5 dobrih podstringova:  $s_1 \dots s_1 = 1$ ,  $s_3 \dots s_3 = 1$ ,  $s_4 \dots s_4 = 1$ ,  $s_1 \dots s_2 = 10$ ,  $s_2 \dots s_4 = 011$

Tvoj zadatak je da izračunaš koliko dobrih podstringova ima dati string  $s$ .

### Ulaz:

Prva linija sadrži ceo broj  $t$  ( $1 \leq t \leq 1000$ ) — broj upita.

Svaka od narednih  $t$  linija sadrži jedan binarni string  $s$  ( $1 \leq |s| \leq 2 \cdot 10^5$ ), sastavljen isključivo od cifara 0 i 1.

Zagarantovano je da je zbir dužina svih stringova kroz sve upite manji ili jednak  $2 \cdot 10^5$ .

### Izlaz:

Za svaki upit ispiši jedan ceo broj — broj dobrih podniski u datom stringu  $s$ .

### Primer:

Ulaz

4

0110

0101

00001000

0001000

Izlaz

4

3

4

3

## Zadatak 3: Rastući niz sa fiksnim OR-om

### Opis:

Dat je pozitivan ceo broj  $n$ . Potrebno je pronaći najduži mogući niz pozitivnih celih brojeva  $a = [a_1, a_2, \dots, a_k]$  koji zadovoljava sledeće uslove:

- $a_i \leq n$  za sve  $1 \leq i \leq k$
- Niz je strogo rastući, tj.  $a_i > a_{i-1}$  za sve  $2 \leq i \leq k$
- $a_i \mid a_{i-1} = n$  za sve  $2 \leq i \leq k$ , gde  $\mid$  predstavlja bitovski OR operator

### Ulaz:

Svaki test sadrži više test primera.

Prva linija sadrži ceo broj  $t$  ( $1 \leq t \leq 1000$ ) — broj test primera.

Zatim sledi  $t$  linija, svaka sadrži po jedan ceo broj  $n$  ( $1 \leq n \leq 10^{18}$ ).

Zagarantovano je da zbir dužina svih najdužih validnih nizova kroz sve testove ne prelazi  $5 \cdot 10^5$ .

### Izlaz:

Za svaki test primer, ispiši dve linije:

Prva linija: broj  $k$  — dužina konstruisanog niza.

Druga linija:  $k$  pozitivnih celih brojeva, članova niza.

Ako postoji više ispravnih najdužih nizova, možeš ispisati bilo koji od njih.

### Primer:

Ulaz

```
4
1
3
14
23
```

Izlaz

```
1
1
3
1 2 3
4
4 10 12 14
5
7 18 21 22 23
```

## Zadatak 4: AND nizovi

### Opis:

Niz od  $n$  nenegativnih celih brojeva ( $n \geq 2$ )  $a_1, a_2, \dots, a_n$  naziva se *dobar* ako za svako  $i$  od 1 do  $n - 1$  važi:

$$a_1 \& a_2 \& \dots \& a_i = a_{i+1} \& a_{i+2} \& \dots \& a_n$$

gde simbol  $\&$  označava bitovski AND operator.

Dat ti je niz  $a$  dužine  $n$ . Tvoj zadatak je da pronadješ broj permutacija  $p$  brojeva od 1 do  $n$  za koje je niz  $a_{p_1}, a_{p_2}, \dots, a_{p_n}$  dobar. Pošto broj može biti veoma velik, ispiši rezultat po modulu  $10^9 + 7$ .

### Ulaz:

Prva linija sadrži ceo broj  $t$  ( $1 \leq t \leq 10^4$ ) — broj test primera.

Za svaki test primer sledi:

Jedna linija sa jednim celim brojem  $n$  ( $2 \leq n \leq 2 \cdot 10^5$ ) — veličina niza.

Jedna linija sa  $n$  celih brojeva  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $0 \leq a_i \leq 10^9$ ) — elementi niza.

Zagarantovano je da je zbir vrednosti  $n$  kroz sve test primere manji ili jednak  $2 \cdot 10^5$ .

### Izlaz:

Za svaki test primer ispiši jednu liniju — broj dobrih permutacija, po modulu  $10^9 + 7$ .

### Primer:

Ulaz

4

3

1 1 1

5

1 2 3 4 5

5

0 2 0 3 0

4

1 3 5 1

Izlaz

6

0

36

4

**Napomena:**

U prvom primeru, svi brojevi su jednaki, pa je svaka permutacija dobra. Postoji ukupno  $3! = 6$  permutacija.

U drugom primeru ne postoji nijedna dobra permutacija.

U trećem primeru jedna od dobrih permutacija je:  $[1, 5, 4, 2, 3]$ , što daje niz  $[0, 0, 3, 2, 0]$ , koji zadovoljava uslov:

$$s_1 = s_2 \& s_3 \& s_4 \& s_5 = 0, \quad s_1 \& s_2 = s_3 \& s_4 \& s_5 = 0, \quad \text{itd.}$$

## Zadatak 5: Zanimljiv niz

### Opis:

Niz od  $n$  nenegativnih celih brojeva  $a[1], a[2], \dots, a[n]$  nazivamo *zanimljivim* ako ispunjava  $m$  uslova.  $i$ -ti uslov se sastoji od tri broja  $l_i, r_i, q_i$  ( $1 \leq l_i \leq r_i \leq n$ ) i označava da:

$$a[l_i] \& a[l_i + 1] \& \dots \& a[r_i] = q_i$$

gde  $\&$  predstavlja bitovski AND operator (kao u C++, Javi, Pythonu).

Tvoj zadatak je da pronadješ bilo koji niz koji zadovoljava sve uslove, ili da zaključiš da takav niz ne postoji.

### Ulaz:

Prva linija sadrži dva cela broja  $n$  i  $m$  ( $1 \leq n, m \leq 10^5$ ) — broj elemenata u nizu i broj uslova.

Svaka od narednih  $m$  linija sadrži tri cela broja  $l_i, r_i$  i  $q_i$  ( $1 \leq l_i \leq r_i \leq n$ ,  $0 \leq q_i < 2^{30}$ ) — opis  $i$ -tog uslova.

### Izlaz:

Ako postoji niz koji zadovoljava sve uslove, u prvoj liniji ispiši **YES**, a u drugoj liniji  $n$  celih brojeva  $a[1], \dots, a[n]$  ( $0 \leq a[i] < 2^{30}$ ) — pronadjeni niz. Ako postoji više rešenja, ispiši bilo koje.

Ako ne postoji takav niz, ispiši **NO**.

### Primer:

Ulaz

3 1

1 3 3

Izlaz

YES

3 3 3

Ulaz

3 2

1 3 3

1 3 2

Izlaz

NO

## Zadatak 6: Stepeni broja dva (za samostalni rad)

### Opis:

Positivan ceo broj  $x$  naziva se stepenom broja dva ako se može predstaviti kao  $x = 2^y$ , gde je  $y$  nenegativan ceo broj. Dakle, stepeni broja dva su: 1, 2, 4, 8, 16, ...

Data su dva pozitivna cela broja  $n$  i  $k$ . Tvoj zadatak je da predstaviš broj  $n$  kao sumu tačno  $k$  stepena broja dva.

### Ulaz:

Jedina linija ulaza sadrži dva cela broja  $n$  i  $k$  ( $1 \leq n \leq 10^9$ ,  $1 \leq k \leq 2 \cdot 10^5$ ).

### Izlaz:

Ako nije moguće predstaviti  $n$  kao sumu  $k$  stepena broja dva, ispiši **NO**.

U suprotnom, ispiši **YES**, a zatim  $k$  pozitivnih celih brojeva  $b_1, b_2, \dots, b_k$  takvih da je svaki  $b_i$  stepen broja dva, i  $\sum_{i=1}^k b_i = n$ . Ako postoji više rešenja, možeš ispisati bilo koje od njih.

### Primeri:

Ulaz

9 4

Izlaz

YES

1 2 2 4

Ulaz

8 1

Izlaz

YES

8

Ulaz

5 1

Izlaz

NO

Ulaz

3 7

Izlaz

NO

## Zadatak 7: Dobar niz (za samostalni rad)

### Opis:

Niz  $a = [a_1, a_2, \dots, a_n]$  se naziva **dobrim** ako važi:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2 \cdot (a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n)$$

gde je  $\oplus$  bitovni XOR.

Dat je početni niz. Dozvoljeno je dodati najviše 3 broja na kraj niza tako da niz postane dobar. Ne moraš minimizovati broj dodatih elemenata.

### Ulaz:

Prva linija: broj test primera  $t$  ( $1 \leq t \leq 10^4$ ). Za svaki test primer:

Jedan broj  $n$  ( $1 \leq n \leq 10^5$ ).

Zatim niz  $n$  brojeva  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $0 \leq a_i \leq 10^9$ ).

Ukupna suma  $n$  kroz sve test primere je  $\leq 10^5$ .

### Izlaz:

Za svaki test primer:

Broj  $s$  ( $0 \leq s \leq 3$ ) — broj dodatih elemenata.

Zatim  $s$  brojeva koje dodajemo, bilo kojim redosledom.

### Primer:

Ulaz

```
3
4
1 2 3 6
1
8
2
1 1
```

Izlaz

```
0

2
4 4
3
2 6 2
```



## Zadatak 8: Izgubljeni niz (za samostalni rad)

Profesor Fedja, strastveni ribolovac i obožavalac ronjenja na dah, pronašao je svoj 14. omiljeni hobi - zaboravljanje nizova. Ova novootkrivena disciplina teče na sledeći način:

Na početku, Fedja zamisli niz  $A$  sa  $N$  prirodnih brojeva. Nakon toga on na papiru zapiše niz  $B$  sa tačno  $\frac{N(N+1)}{2}$  brojeva. Članovi niza  $B$  su dobijeni primenom bitovne operacije **or** (videti napomenu) na sve parove brojeva iz niza  $A$ , preciznije:

Za svaki uredjeni par indeksa  $(i, j)$ ,  $(1 \leq i \leq j \leq N)$  iz niza  $A$ , u nizu  $B$  je zapisana vrednost  $A_i$  **or**  $A_j$ . Ako je neka vrednost ista za više parova, ona se u nizu  $B$  pojavljuje tačno onoliko puta koliko ima parova sa tom vrednošću. Ove vrednosti se u nizu  $B$  mogu javiti u proizvoljnom redosledu.

Naravno, profesor se umorio nakon zapisivanja svih ovih brojeva i u potpunosti zaboravio prvobitno zamišljeni niz  $A$ . Srećom, na papiru mu je ostao zapisan niz  $B$ . Da li možete da pomognete našem dragom profesoru i pronađete izgubljeni niz  $A$ ?

### Ulaz

U prvoj liniji standardnog ulaza nalazi se jedan prirodan broj  $N$ , dužina izgubljenog niza  $A$ . U drugoj liniji standardnog ulaza nalazi se  $\frac{N(N+1)}{2}$  prirodnih brojeva, elementi niza  $B$  opisanog u tekstu zadatka.

### Izlaz

U jedinoj liniji standardnog izlaza ispisati  $N$  prirodnih brojeva, elemente izgubljenog niza  $A$ . Garantuje se da su ulazni podaci takvi da postoji bar jedan odgovarajući niz. Ako postoji više mogućih nizova, ispisati bilo koje rešenje.

### Primer

#### Ulaz

```
3
5 4 2 3 1 6
```

#### Izlaz

```
1 4 2
```

#### Objašnjenje:

Izgubljeni niz  $A$  ima  $N = 3$  člana i treba ga pronaći koristeći niz  $B = [5, 4, 2, 3, 1, 6]$ . Jedan od mogućih nizova je  $A = [1, 4, 2]$ . Ako primenimo bitovnu operaciju **or** na sve parove brojeva u nizu  $A$ , dobijamo:

- $A_1$  **or**  $A_2 = 1$  **or**  $4 = 5$

- $A_2 \text{ or } A_2 = 4 \text{ or } 4 = 4$
- $A_3 \text{ or } A_3 = 2 \text{ or } 2 = 2$
- $A_1 \text{ or } A_3 = 1 \text{ or } 2 = 3$
- $A_1 \text{ or } A_1 = 1 \text{ or } 1 = 1$
- $A_2 \text{ or } A_3 = 4 \text{ or } 2 = 6$

## Ograničenja

- $1 \leq N \leq 1268$
- $1 \leq B_i < 2^{20}$

Test primeri su podeljeni u 3 disjunktne grupe:

- U test primerima vrednim 20 poena važe ograničenja  $1 \leq N \leq 7$  i  $1 \leq B_i \leq 7$ .
- U test primerima vrednim 40 poena važi ograničenje  $1 \leq N \leq 91$ .
- U test primerima vrednim 40 poena nema dodatnih ograničenja.

## Napomena

Operator disjunkcije u Pascal-u je označen sa `or`, dok se u C++ zapisuje pomoću simbola `|`. Ova operacija  $x \text{ or } y$  se za nenegativne cele brojeve  $x, y$  definiše na sledeći način: Prvo se brojevi zapišu u binarnom zapisu. Ukoliko jedan broj ima manje cifara od drugog, dopisuju mu se vodeće nule sve dok ne budu imali isti broj binarnih cifara. Tako se dobijaju dva niza binarnih cifara, označimo ih sa  $a_1, \dots, a_k$  i  $b_1, \dots, b_k$ . Zatim se za svaku poziciju  $i \in \{1, \dots, k\}$  računa  $c_i$  pomoću sledećih pravila:

- Ako je  $a_i = 0$  i  $b_i = 0$ , tada je  $c_i = 0$
- Ako je  $a_i = 0$  i  $b_i = 1$ , tada je  $c_i = 1$
- Ako je  $a_i = 1$  i  $b_i = 0$ , tada je  $c_i = 1$
- Ako je  $a_i = 1$  i  $b_i = 1$ , tada je  $c_i = 1$

Niz binarnih cifara  $c_1, \dots, c_k$  (koji možda ima vodeće nule) je binarni zapis rezultata, odnosno broja  $x \text{ or } y$ .